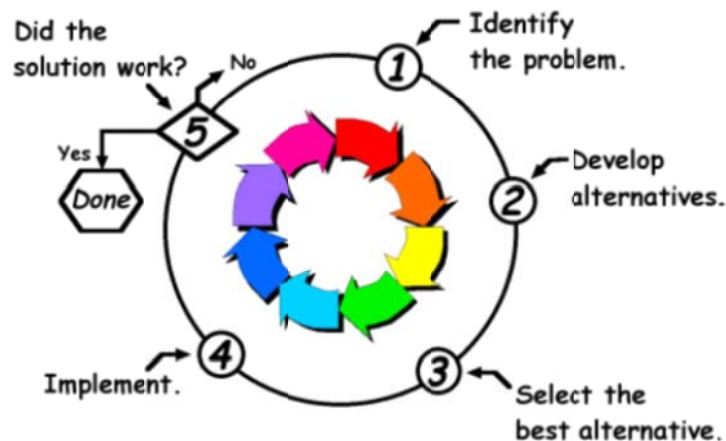


## Steps to solve a problem...



### **Metode rješavanja problema pomoću računara**

U opštem slučaju, problem koji treba riješiti zovemo ulazna informacija, a odgovarajući rezultat izlazna informacija. Postupak transformacije ulazne informacije u izlaznu informaciju zovemo algoritam. Navedena transformacija može se predstaviti blok dijagramom:



Pri rješavanju nekog problema potrebno je izabrati pogodan algoritam koji najbrže dovodi do željenog rezultata.

Postoji mnogo metoda za rješavanje matematičkih i ostalih problema uz pomoć računara.

Mogu se podijeliti na

- numeričke,
- simboličke i analitičke
- heurističke metode

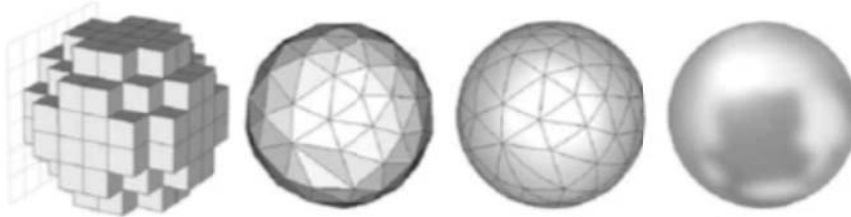
Različiti problemi zahtijevaju i različit pristup rješavanju.

U sve tri grupe metoda vidi se velik napredak iz godine u godinu. Postoji i sve više hibridnih metoda, koje kombiniraju analitički, numerički i heuristički pristup i kojima su već uspješno riješeni i neki vrlo teški problemi.

## Numeričke metode

Kod ovih metoda se do rješenja dolazi **numeričkim približnim (aproksimativnim)** rješavanjem.

Razradom i realizacijom algoritama i analizom pogreške za dobivanje približnog rješenja takvih problema bavi se numerička matematika. Izučavanje numeričkih metoda uključuje analizu greške, stabilnost, konvergenciju (kod iterativnih metoda), kao i niz drugih svojstava. Ovaj dio numeričke matematike naziva numerička analiza.



*Numeričke su se metode počele razvijati još u antičkoj Grčkoj, i nastavile kroz cijelu kasniju istoriju. Od mnoštva velikih matematičara i fizičara koji su se bavili i numeričkim metodama navodimo samo nekoliko imena: Euklid, Arhimed, Fibonacci, Newton, Fermat, Descartes, Gauss, Euler, Pascal, Lagrange, Fourier, Rayleigh, Poincaré, Ljapunov, Courant.... Njihove rezultate su kasnije preuzeli matematičari i dalje ih usavršili, dokazali i generalizirali. Izvorni autori ne bi u novim interpretacijama više mogli ni prepoznati vlastite ideje. S pojavom računara numeričke su metode dobile novi impuls. Mnoge metode poznate od ranije, na računaru su postale mnogo preciznije i brže, pa su se i znatno usavršile i danas se mogu upotrijebiti za mnogo složenije i opsežnije probleme nego prije.*

Problemima praktične realizacije algoritama bavi se područje teorije programiranja. Jedan od njegovih osnovnih zadataka je priprema i sastavljanje programa za računara prema izabranom algoritmu.

U sklopu matematike postoji više numeričkih metoda a glavne bi bile:

- **Numerička analiza** je grana numeričke matematike koja se bavi pronalaženjem i unapređivanjem algoritama za numeričko izračunavanje vrijednosti vezanih uz matematičku analizu, poput numeričkog integriranja, numeričkog deriviranja i numeričkog rješavanja diferencijalnih jednačini. Posebna je uloga numeričkih metoda u rješavanju integrala i diferencijalnih jednačini, budući velik broj istih nije analitički rješiv, a izuzetno su važni u primjenama. Nasuprot tome, potreba za numeričkim deriviranjem nije izrazita, budući za deriviranje postoji konačan skup pravila pomoću kojeg je moguće derivirati svaku funkciju simboličkim postupcima.
- **Numerička linearna algebra** je grana numeričke matematike koja se bavi pronalaženjem algoritama za brzo rješavanje problema iz linearne algebre. U prvom redu treba istaknuti metode za rješavanje linearnih sistema, te metode za određivanje svojstvenih vrijednosti i inverza matrice. Za razliku od npr. numeričke analize, metode u numeričkoj linearnoj algebri nisu prvenstveno aproksimativne (mada postoje i takve), već je osnovni problem optimizirati vremensko trajanje i memorijske zahtjeve računarskog rješavanja problema. Sistemi linearnih jednačini i matrice koje se rješavaju ovim algoritmima u pravilu su velikih dimenzija (npr. sistem od 100 000 linearnih jednačina s isto toliko nepoznatih).
- **Interpolacijske metode** su numeričke metode razvijene kako bi se kroz konačan broj tačaka (koje najčešće predstavljaju neka mjerenja) provukla funkcija određenih karakteristika. Za takvu funkciju, koja prolazi kroz sve zadane tačke, kažemo da interpolira zadani skup tačaka. Interpolacijske metode prvenstveno se bave traženjem polinoma koji interpoliraju zadane tačke.

- **Aproksimativne metode** su metode razvijene kako bi se što bolje aproksimirala neka funkcija na zadanom intervalu. U praksi, funkcija koju pokušavamo aproksimirati često nije ni poznata, već znamo samo konačan broj njezinih tačaka (mjerjenja). Za razliku od interpolacijskih metoda, cilj ovoga puta nije naći funkciju koja će proći kroz sve zadane točke, već odrediti onu koja će ukupno najmanje odstupati od (pretpostavljene) funkcije na cijelom intervalu. Najkorištenija metoda za određivanje aproksimativne funkcije je "metoda najmanjih kvadrata".

*Npr. je Gaussov algoritam eliminacije za rješavanje sistema linearnih jednačina je poznata metoda među matematičarima i inženjerima, ali je za čovjeka koji se koristio samo papirom, olovkom i kalkulatorom bio je problem riješiti sistem od desetak linearnih jednačina, a rješenje koje je sadržavalo od dvadesetak jednačbi je bio pravi podvig. Nelinearne jednačine su bile još daleko veća poteškoća.*

*Danas uz pomoć računara ni sistemi od nekoliko milijona nelinearnih jednačbi ne predstavljaju nesavladivu prepreku. Tako je NASA pred tridesetak godina najavila mogućnost numeričko rješenje sistema od oko milijardu jako nelinearnih jednačbi, nastalih modeliranjem strujanja zraka oko avionskog krila.*

*Pomoću računara se mogu generisati modeli različitih konstrukcija i opterećenja, izvodi proračun, a na kraju daje grafički prikaz i provjera rezultata, dimenzioniraju se armiranobetonske, čelične i drvene konstrukcije, te provjeravaju naprezanja i deformacije.*

*Može se uvažiti bilo koji od poznatih nelinearnih statičkih i dinamičkih modela: geometrijska i materijalna nelinearnost raznih tipova: veliki pomaci i velike deformacije, nelinearna elastičnost, plastičnost, viskoelastičnost, viskoplastičnost, mehanika loma, kontakti problemi itd.*

*Numeričke metode ponekad se tretiraju kao "nebaučne" u poređenju s analitičkim i eksperimentalnim.*

*Tako se u staroj Grčkoj prezirala svaka primjena nauke, posebno matematike, a filozofi i naučnici su tretirali inženjerstvo kao manje vrijedni praktični zanat. Oni čak ni numeričke metode nisu razvijali zbog primjene.*

*Objektivno nije baš jako važno jesu li numeričke metode naučne ili zanatske, jer uz njihovu pomoć možemo korektno riješiti daleko više problema nego s bilo kakvim drugim metodama.*

*Često se može i dokazati ispravnost takvih rješenja. Numeričke metode omogućuju rješavanje čak i spoznajnih problema npr. haotičnog odgovora u dinamici konstrukcija.*

## Simboličke i analitičke metode

Analitičkim pristupom se traži optimalno rješenje. U opštem slučaju trebali bi **primjenom analize i sinteze** (rašćlanjavanjem i integrisanjem elemenata) predvidjeti sve moguće uzroke i dati sva moguća rješenja. U ovom slučaju **postoji opšte rješenje/a koje je moguće predstaviti simbolički, a svako pojedinačno rješenje se može izvesti iz njega**.

Analitičkim načinom se korak po korak slijedi procedura koja je već prije postavljena kao algoritam i izgrađena na osnovu analitičko-matematičke procjena i uglavnom već zadanih modela.

Po svojoj suštini *analiza je rastavljanje predmeta istraživanja na njegove sastavne dijelove, odnosno na činioce strukture, funkcija, veza i odnosa na određenom prostoru u određenom vremenu*. Rastavljanje može da bude *fizičko, duhovno – misaono, i kombinovano*.

Opšti predmet analize je uvek složena cjelina.

Opšte u posebnom dovoljne određenosti da se može izdvojiti i istražiti kao izdvojena cjelina i posebno u opštem, opet kao moguća izdvojena cjelina.

**Svi pojmovi su, apstrakcije u nužnoj mjeri.** Analitičnost apstrakcije proizilazi iz njene zasnovanosti na analizi koja joj prethodi i na postupku apstrahovanja - izdvajanja iz (uslovne) cjelina. **Izdvajanje u biti sadrži podjelu na ono što se izdvaja i ono iz čega, odnosno od čega se izdvaja.**

Analiza omogućava sintezu pa se može govoriti o jedinstvenim analitičko sintetičkim metodama koji obuhvataju:

- **apstrakciju** Apstraktno: dobijeno apstrakcijom, misaono; suprotno od konkretno. Faktički, kada je nešto apstraktno, to znači da se nešto ne odnosi samo na jednu pojedinost, već na neku veću celinu, skup nečega i sl.
- **dedukciju** Dedukcija je postupak kojim se iz opšteg suda izvodi neki drugi, posebni ili pojedinačni sud. Ovaj pojedinačni sud logički nužno sledi iz opštijeg, ali ne mora biti i istinit.
- **konkretizaciju** Konkretizacija je postupak suprotan apstrakciji.
- **generalizaciju** Metoda generalizacije je misaoni postupak uopštavanja kojim se od jednog posebnog pojma dolazi do opšteg koji je viši od ostalih pojedinačnih
- **specijalizaciju** Metoda specijalizacije je postupak kojim se od opšteg pojma dolazi do novog pojma, manjeg obima a većeg sadržaja.
- **indukciju** Indukcija je vrsta posrednog zaključka kod kojeg polazimo od pojedinačnog ka opštem, to znači da ono što vrijedi za svaki pojedinačni slučaj jedne vrste vrijedi za cijelu vrstu. Induktivni zaključak se dijeli na potpun i nepotpun. Ako se u premisama (polazni sud) nabroji svaki pojedini slučaj neke vrste pa se zaključi o cijeloj vrsti onda je to potpuna indukcija. Ako se na osnovu nekoliko primjera neke vrste zaključi o čitavoj vrsti onda je to nepotpuna indukcija.

### Aksimatske metode

Aksiomska metoda se razvila iz metode dedukcije, za razliku od eksperimentalne koja se razvila iz indukcije. Predstavlja savremeni vid deduktivne metode, od koje se razlikuje po tome što aksiomska metoda koristi brojne i raznovrsne postupke formalizacije.

Svrha aksiomske metode je postizanje korektnosti definicije i dokaza koji isključivo zavise o njihovim strukturama.

Osnovna aksiomska pravila su:

- pravilo **konzistentnosti** (svi aksiomi jednog aksiomskog sistema moraju činiti logičan i koherentan sistem);
- pravilo **cjelovitosti** (sistem aksioma mora biti cjelovit);
- pravilo **nezavisnosti** aksioma (aksiomi jednog sistema aksioma moraju biti nezavisni tako što ni jedan aksiom ne smije biti izveden iz drugih aksioma u sistemu).

## Eksperimentalne metode

Eksperimentalna metoda je postupak posmatranja pojave koja se ispituje pod tačno određenim uslovima koji dopuštaju da se prati tok pojave i da se ona svaki put uz ponavljanje tih uslova ponovno izazove.

Zasnovana je na eksperimentu.

Osnovni faktori eksperimentalne metode su: **eksperimentator, eksperimentalna pojava** (fenomen, događaj), **sredstva eksperimenta, eksperimentalni postupak, prognoza i kontrolni eksperimentalni događaj, rezultati eksperimenta i ekstrapolacija rezultata u realne uslove.**

Problem eksperimenta je vjerodostojnost određivanja eksperimentalnog fenomena.

Događa se da neku tvrdnju program ne može ni dokazati ni oboriti.

Godel je dokazao da postoje *neodlučive tvrdnje koje se u principu ne mogu (i nikada neće moći) matematičkim metodama ni dokazati ni oboriti.*

### Logički atomizam

Analiitička filozofija ima svoje korijene u razvoju **logike predikata**. To je dozvolilo mnogo većem broju rečenica da se prikažu u logičkom obliku. Bertrand Russell ju je posvojio kao svoj glavni filozofski alat; alat za kojeg je on smatrao da može pokazati ispodpovršinsku strukturu filozofskih problema.

Na primjer riječ «je» se može analizirati na tri načina:

- u 'mačka je životinja': je predikacije kaže da 'x je P':  $P(x)$
- u 'neki auto je crven': je isto tako izražava predikaciju, tvrdi se postojanje određenih klasa predmeta koje stoje u odnosu koordinacije. To je egzistencijalni sud, simbolički izražen:  $\exists x(A(x) \& C(x))$
- u 'avion je aeroplan': je ovdje stoji kao predikat identiteta, je x isto kao y:  $x=y$

Pojava računara je omogućila i renesansu analitičkih i simboličkih metoda.

Idejama automatske primjene simboličkih i analitičkih metoda su se bavili već Babbage i Turing prije pojave elektroničkih računara. (Babbage je čak napravio mehanički računar, s kojim se nije moglo baš mnogo računati zbog neprekidnog kvarenja).

Uskoro nakon uvođenja računara pojavio se simbolički programski jezik LISP uz čiju pomoć su se mogli rješavati simbolički problemi. Ubrzo zatim se pojavio i logički jezik PROLOG, a nakon toga još veliki broj drugih simboličkih i logičkih jezika. LISP je danas još uvijek u intenzivnoj upotrebi, dok je PROLOG u najnovije vrijeme zamijenjen novim još jačim, ali i još apstraktnijim i složenijim logičkim programskim jezikom Gödel.

Danas postoje i vrlo razvijeni matematički paketi, od kojih se ističu Mathematica, Maple i MACSYMA. Ti paketi sadrže veliki broj matematičkih funkcija, algoritama i transformacija. Uz pomoć tih paketa može se tražiti pojednostavljenije matematičkih izraza na više načina, analitički derivirati, rješavati određeni i neodređeni integrali te obične i parcijalne diferencijalne jednačbe.

*U posljednje vrijeme razvijaju programi za automatsko dokazivanje matematičkih teorema.*

*U program se upisuju aksiomi koje smije upotrijebiti. Osim toga zadaje se hipoteza koju treba dokazati ili oboriti. Korake dokaza računar ispituje u jeziku razumljivom matematičarima, pa ih svaki specijalist za konkretno područje može provjeriti.*

*Do sad je ponovljeno mnogo poznatih matematičkih dokaza, npr. klasičnih teorema iz euklidske planimerije i stereometrije, a već su u "saradnji" čovjeka i računara dokazani neki do nedavno nedokazanih teških matematičkih teorema.*

Najteže dokaze će još dugo (možda i uvijek) morati provoditi ljudi, ali će im računari višestruko ubrzati i olakšati rad.

## Heurističke metode

Heuristika obuhvaća metode i tehnike rješavanja problema, učenja i otkrivanja koji su bazirani na iskustvu. Heurističke metode se koriste da ubrzaju proces pronalaženja dovoljno dobrog rješenja u situacijama kada sprovođenje detaljnog istraživanja nije praktično. Primjeri toga obuhvaćaju korištenje raznih uopštenih pravila, informisanog nagađanja, intuicije i zdravog razuma.

Heuristika se može definisati kao korištenje lako dostupnih informacija, čija primjena nije strogo određena, za kontrolu rješavanja problema od strane ljudi i mašina.

Heuristički se sakupljaju iskustva (engl. experience-based learning) i stvara se (unutar varijable vremena) **zdravorazumsko rješenje: common sense**. Najbliže heurističkom je intuitivno mišljenje, dok analitičkom analiza po (zadanom) obrascu (algoritmu).

Heurističko mišljenje se ponekad opisuje frazom "umjetnost saznanja (ili otkrivanja)". Često se spominje i u kontekstu poboljšanja rješenja problema, odnosno lakšeg nalaženja rješenja.

Glavna heuristička novost sistemskog pristupa je svođenje sistema (odn. redukcija) na dinamiku, za razliku od dekonstruktivističkog pristupa u klasičnom smislu (analitičkom) pristupu.

Problem, odnosno sistem se rješava heurističkom redukcijom (sastavnica, elemenata ili entiteta), koristeći dinamiku koja daje različite prioritete i važnost pojedinim članovima.

### Kriterijum kompromisa i heuristika

Kriterijum kompromisa se koristi da bi se odlučilo **za ili protiv korišćenja heuristike** za dati problem i on uključuje sljedeće:

- **Optimalnost:** Kad postoji više rješenja za dati problem, da li heuristika garantuje nalaženje najboljeg rješenja? Da li nam najbolje rješenje uopšte treba?
- **Kompletnost:** Kad postoji više rješenja za dati problem, da li heuristika nalazi sva rješenja? Da li nam uopšte trebaju sva rješenja? Mnoge heuristike nalaze samo jedno rješenje.
- **Preciznost i tačnost:** Može li heuristika da pruži interval poverenja za navodno rješenje? Da li je u rješenju greška suviše velika?
- **Vrijeme izvršavanja:** Da li je ovo najbolja heuristika za ovaj tip problema? Neke heuristike konvergiraju brže od ostalih dok neke samo su marginalno brže od klasičnih metoda.

U nekom slučajevima pokazuje se da je teško ocijeniti da li je rješenje koje je našla heuristika dovoljno dobro, zato što teorija na kojoj je zasnovana ta heuristika nije veoma razrađena.

### Hipoteza heurističkog pretraživanja

Hipoteza heurističkog pretraživanja<sup>1</sup>: fizički sistem simbola koji će više puta će generisati i modifikovati poznate strukture simbola dok se ne stvori struktura koja odgovara rješenju. Svaka slejedeća iteracija zavisi od prethodnog koraka, i na taj način **heuristička pretraga uči koje puteve da koristi a koje da odbacuje** mjereći koliko je blizu je trenutna iteracija rješenju. Samim tim neke mogućnosti se neće generisati jer će biti izmjereno da je manje moguće da dodju do rješenja.

Heuristički metod postiže taj zadatak **koristeći stabla pretrage u prostotu stanja**. Međutim, umjesto da generiše sve grane, heuristika bira grane koje će vjerovatnije doći do rješenja od ostalih. Selektivna je u svakoj tački odluke, birajući grane koje će prije dovesti do rješenja.

---

<sup>1</sup> Hipotezu su iznijeli Allen Newell i Herbert A. Simon pri prijemu Turingove nagrade

---

Heurističke metode i metode umjetne inteligencije su pogodne **za rješavanje nejasnih i "mutnih" problema, koji se ne mogu dobro matematički formulirati**, npr. medicinska dijagnostika i nalaženje potencijalnih rudnih ležišta iz podataka o konfiguraciji terena.

Pogodne su i za dobro definisane probleme koji bi se mogli rješavati matematičkim metodama, ali se od toga mora odustati zbog nedostatka ili nepouzdanosti raspoloživih podataka.

### **Kombinatorička eksplozija heuristika i vještačka inteligencija**

Druga važna klasa problema za koje se intenzivno primjenjuju metode umjetne inteligencije su problemi opterećeni tzv. "**kombinatoričkom eksplozijom**".

To su problemi za koje je poznat egzaktni matematički algoritam, ponekad je čak i jednostavan, ali bi njegova primjena kad je broj nepoznanica velik, zahtijevala neostvarivo mnogo vremena.

Primjer kombinatoričke eksplozije je igranje šaha. Nije posebno teško napisati na nekom programskom jeziku algoritam koji bi pretraživanjem svih varijanata do kraja partije egzaktno odredio najbolji potez, ali realizacija takvog algoritma nije moguća u stvarnosti, zbog golemog broja varijanata koje bi trebalo istražiti, koje mnogostruko nadmašuju mogućnosti bilo kojeg računara.

Šah po broju podataka i mogućih varijanata ne predstavlja (teoretski) veliki problem postoji samo 64 polja i 32 figure. Problemi koji se pojavljuju u drugim djelatnostima, npr. u automatskom projektovanju, često su veći za mnogo redova veličine.

U literaturi se navode primjeri koji po formulaciji izgledaju prilično bezazleno, ali bi za njihovo egzaktno rješavanje na nekom budućem računaru mnogo djelotvornijem od današnjih trebalo mnogostruko više vremena od sadašnje starosti svemira. Naravno da se mora odustati rješavanja takvog problema pretraživanjem svih mogućnosti.

Ako opet uzmemo primjer iz šaha, program će odrediti potez koji samo slučajno može biti egzaktno najbolji, ali je najbolji koji se može odrediti na raspoloživom kompjuteru odabranim programom u raspoloživom vremenu. *Ni šahovski velemaistor ne može garantovati da je njegov potez apsolutno najbolji – osim u slučajevima kad je rješenje jednostavno – na primjer kad je moguć forsirani matni napad ili pat te često u završnici kad je jako reduciran broj figura na ploči.*

---

Metodama **umjetne inteligencije nastoji se eliminirati pretraživanja za koja se približnim rezonovanjem može zaključiti da vjerovatno ne sadrže optimum**. Tako se dobijaju rješenja u prihvatljivom vremenu, ali se ne može dokazati da su "apsolutno" najbolja. Samo se može tvrditi da su tako dobijena rješenja s vrlo velikom vjerojatnošću mnogo bolja od rješenja koja bismo mogli postići bez primjene tih metoda.

### **Delfi metoda**

Ponekad se heurističke metode koriste Delfi metodom. Delfi metoda je metoda za prognoziranje. Delfi metoda prvobitno se najviše koristila za predviđanje budućih međunarodnih situacija i potencijalnih ratnih stanja, ali se ubrzo počela primjenjivati u prognoziranju tehničkog i tehnološkog razvoja.

Metoda se sastoji u organizovanom i sistemskom prikupljanju predviđanja tima eksperata, stoga predstavlja metodu sistemske primjene naučnog mišljenja u postupku donošenja važnih odluka o budućnosti različitih pojava i različitih fenomena.

Logika Delfi metode je sistemsko korišćenje mišljenja eksperata čime se simuliraju buduće pojave ili prilično pouzdanu projekciju budućih pojava.